

Musterlösungen zur 2. Testklausur

Aufgabe 1

Nach einem Unfall wird Schadstoff am Grund eines Sees abgelagert, und zwar 2 kg am Tag des Unfalls, und an jedem weiteren Tag 5 % weniger als am Vortag. Wieviel Schadstoff wird insgesamt pro Hektar abgelagert?

LÖSUNG: Am Tag n werden $2 \text{ kg} \cdot \left(\frac{95}{100}\right)^{n-1}$ Schadstoff pro Hektar abgelagert. Das macht insgesamt

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \text{ kg} \cdot \left(\frac{95}{100}\right)^{n-1} = 2 \text{ kg} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{95}{100}\right)^n = 2 \text{ kg} \cdot \frac{1}{1 - \frac{95}{100}} = 2 \text{ kg} \cdot \frac{100}{5} = 40 \text{ kg}$$

Schadstoff pro Hektar. □

Aufgabe 2

Gesucht sind Wertebereich und Umkehrfunktion von $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + e^x}$$

LÖSUNG: Es gilt

$$f(x) = \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} = \frac{(e^x)^2 - 1}{e^x + 1} = e^x - 1.$$

Also steigt f monoton, es ist $f(x) \geq f(0) = 0$ für alle x und $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$. Also hat f als Wertebereich $[0, \infty[$. Für die Umkehrfunktion gilt

$$y = f(x) = e^x - 1 \Rightarrow e^x = y + 1 \Rightarrow x = \ln(y + 1),$$

also $f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $y \mapsto \ln(y + 1)$. □

Aufgabe 3

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt. Wenn f und g beide ungerade sind, muß dann auch $\max\{f, g\}$ ungerade sein?

LÖSUNG: Das ist nicht der Fall, man betrachte $f(x) = x$ und $g(x) = x^3$, dann gilt

$$\max\{f(-2), g(-2)\} = \max\{-2, -8\} = -2 \neq -8 = -(\max\{2, 8\}) = -(\max\{f(2), g(2)\}),$$

das Maximum ungerader Funktionen ist also i. a. nicht wieder ungerade. □

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{2t}{1+t^2}$.

i) BEH.: Die Funktion f ist streng monoton steigend.

BEWEIS: Es seien $t, u \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2t}{1+t^2} < \frac{2u}{1+u^2} = f(u) \\ \iff t(1+u^2) &< u(1+t^2) \\ \iff t + tu^2 &< u + ut^2 \\ \iff tu^2 - ut^2 &< u - t \\ \iff tu(u-t) &< u - t \end{aligned}$$

Wegen $tu \leq 1$ gilt die letzte Ungleichung genau dann, wenn $u - t > 0$ ist, d. h. aus $t < u$ folgt $f(t) < f(u)$. \square

ii) Es sei $x_1 = \frac{1}{2}$, und für $n \geq 1$ sei $x_{n+1} = f(x_n)$. Man zeige die Konvergenz der Folge (x_n) und bestimme den Grenzwert.

LÖSUNG: Wir zeigen mit Induktion, daß die Folge beschränkt und monoton ist: Es gilt $x_1 < 1$, und aus $x_n < 1$ folgt wegen der Monotonie von f auch $x_{n+1} = f(x_n) < f(1) = 1$, also ist $x_n < 1$ für alle n (das zeigt insbesondere, daß die Definition der Folge überhaupt sinnvoll ist, jedes Folgeglied liegt im Definitionsbereich von f !). Weiter gilt

$$x_2 = f(x_1) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} > \frac{1}{2} = x_1,$$

und aus $x_n > x_{n-1}$ folgt wegen der Monotonie von f sofort $x_{n+1} = f(x_n) > f(x_{n-1}) = x_n$; also steigt (x_n) auch monoton und ist somit konvergent.

Sei $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, dann folgt wegen der Stetigkeit von f

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

und somit

$$x(1+x^2) = 2x \iff x^3 - x = 0 \iff x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1) = 0.$$

Von den drei Lösungen 0, -1 und 1 der Gleichung sind die beiden ersten unbrauchbar, da wegen der Monotonie von (x_n) alle Folgeglieder $\geq x_1$ sind, der Grenzwert also nicht kleiner als $\frac{1}{2}$ sein kann. Somit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. \square

Aufgabe 5

Für welche $x > 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n \cdot n}}{n!}$? Hinweis: $\frac{e^n}{n} \rightarrow \infty$ bei $n \rightarrow \infty$.

LÖSUNG: Die Reihe konvergiert für $x \leq 1$, denn dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n \cdot n}}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1,$$

wir haben also eine konvergente Majorante. Für $x > 1$ divergiert die Reihe, denn dann haben wir wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n \cdot n}}{n!} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n \cdot n}}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)^n$$

eine divergente Minorante, ihre Summanden gehen nach dem Hinweis nicht gegen 0. \square

Aufgabe 6

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig, und $f \circ g$ sei streng monoton.

BEH.: g ist streng monoton.

BEWEIS: Da die Funktion $f \circ g$ streng monoton ist, ist sie auch injektiv. Damit muß auch g injektiv sein, denn sonst gäbe es $x \neq y$ mit $g(x) = g(y)$, also auch $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(g(y)) = f \circ g(y)$ im Widerspruch zu Injektivität von $f \circ g$. Als stetige und injektive Funktion muß g aber streng monoton sein. \square

Aufgabe 7

BEH.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{3}$. Hinweis: $1 < e < 3$.

BEWEIS: Wegen $3 > e$ gilt

$$3^n > e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geq \frac{n^n}{n!} \Rightarrow n! \geq \frac{n^n}{3^n} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^n}} = \frac{n}{3}.$$

□

Aufgabe 8

Gegeben sei folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 3 & 4 \\ -6 & -2 & 2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Man zeige ohne Berechnung des char. Polynoms, daß 1 und -1 Eigenwerte von A sind.

BEWEIS: Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist. Wir müssen also zeigen, daß $A \pm I$ nicht invertierbar sind: Das ist für

$$A - I = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & 2 & 5 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ -8 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

offensichtlich, da die Matrix zwei gleiche Zeilen hat. Bei $A + I$ liefert Subtraktion der ersten von der dritten und vierten Zeile

$$A + I = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 3 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & 5 \\ -4 & -1 & 3 & 2 \\ -8 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -6 & -1 & 3 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

und in dieser Matrix sind die beiden unteren Zeilen linear abhängig. □

ii) Man bestimme die Jordan-Normalform von A .

LÖSUNG: Wir bestimmen zunächst die Eigenräume zu den beiden Eigenwerten:

x_1	x_2	x_3	x_4	Umf.	HV_2
-8	-1	3	4		0
-6	-3	2	5		1
-4	-1	1	2		-1
-8	-1	3	4		1
0	1	1	0	I - 2× III	2
-2	-2	1	3	II - III	2
-4	-1	1	2		-1
0	1	1	0	IV - 2× III	3
0	1	1	0		2
-2	-2	1	3		2
0	3	-1	-4	III - 2× II	-5
0	0	0	0	IV - I	1
0	1	1	0		
-2	-3	0	3	II - I	
0	4	0	-4	III + I	
0	1	1	0		
-2	0	0	0	II + $\frac{3}{4}$ III	
0	-1	0	1	$(-\frac{1}{4}) \times$ III	
0	1	1	0		
1	0	0	0	$(-\frac{1}{2}) \times$ II	
0	-1	0	1		

x_1	x_2	x_3	x_4	Umf.	HV_2	HV_3
-6	-1	3	4		1	0
-6	-1	2	5		1	-1
-4	-1	3	2		1	0
-8	-1	3	6		1	0
6	1	-3	-4	$(-1) \times$ I	-1	0
0	0	-1	1	II - I	0	-1
2	0	0	-2	III - I	0	0
-2	0	0	2	IV - I	0	0
0	1	-3	2	I - 3× III	-1	0
0	0	1	-1	$(-1) \times$ II	0	1
1	0	0	-1	$\frac{1}{2} \times$ III	0	0
0	0	0	0	IV + III	0	0
0	1	0	-1	I + 3× II	-1	3
0	0	1	-1		0	1
1	0	0	-1		0	0

Wir erhalten

$$\text{Eig}(A, 1) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, -1, 1)^T, \quad \text{Eig}(A, -1) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1, 1)^T,$$

beide Eigenräume sind also eindimensional, die JNF von A enthält nur je ein Jordankästchen zu 1 und zu -1 . Um die Größe dieser Kästchen zu bestimmen, müssen wir untersuchen, welche Hauptvektoren höherer Stufe es zu diesen beiden Eigenwerten gibt; d. h. wir untersuchen die Gleichungssysteme $(A - I)x = (0, 1, -1, 1)^T$ und $(A + I)x = (1, 1, 1, 1)^T$. Das geschieht mit denselben Umformungen wie bei der Bestimmung der Eigenräume, wir fügen dem LGS einfach den jeweiligen Eigenvektor als rechte Seite hinzu (Spalte HV_2).

Dabei zeigt sich, daß $(A - I)x = (0, 1, -1, 1)^T$ unlösbar ist – es gibt also zum Eigenwert 1 keinen Hauptvektor zweiter Stufe, das Jordankästchen zu 1 hat Größe 1×1 . Wenn wir unterstellen, daß 1 und -1 die einzigen Eigenwerte von A sind, ist damit ohne weitere Rechnung klar, daß zu -1 ein 3×3 -Kästchen gehört. Wir können das aber auch leicht nachrechnen:

Das System $(A + I)x = (1, 1, 1, 1)^T$ ist lösbar, eine Lösung, also ein HV zweiter Stufe, ist etwa $(0, -1, 0, 0)^T$, und auch $(A + I)x = (0, -1, 0, 0)^T$ ist lösbar, es gibt also auch noch einen HV dritter Stufe zu -1 ; damit ist bewiesen, daß die Matrix A keine weiteren Eigenwerte hat und ihre JNF so

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aussieht. □