Mathematik I 1. Testklausur 11.12.2006

Aufgabe 1: Bestimmen sie den Zahlenwert (als Formel) für die Anzahl der Möglichkeiten der Auswahl einer zehnelementigen Teilmenge aus der Menge $\{1, \ldots, 100\}$ mit genau zwei einziffrigen Elementen. (8 Punkte)

Es existieren in dieser Menge genau 9 *einziffrige Elemente, aus dieser Menge werden dann* 2 *Elemente ausgewählt; die Anzahl der Möglichkeiten dazu ist* $\binom{9}{2}$. *Weiter existieren in dieser Menge genau* 91 *nicht einziffrige Elemente, aus dieser Menge werden dann* 8 *Elemente ausgewählt; die Anzahl der Möglichkeiten dazu ist* $\binom{91}{8}$. *Insgesamt erhalten wir* $\binom{9}{2} \cdot \binom{91}{8}$ *als gesuchte Anzahl der Möglichkeiten.*

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Determinante der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(8 Punkte)

Entwicklung nach der $4-$*ten Spalte und danach Zeilenoperationen mit der ersten Zeile liefert*

$$\det(A) = (-1)^{4+2} 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten weiter mit Hilfe der Sarus-Regel

$$\det(A) = 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 8 .$$

Aufgabe 3: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 9,\ x \neq -3$ und mit

$$\frac{(x^2-9)(x^4+(x-6)^2)}{|x+3|} \leq \frac{(x^4+(x-6)^2)\max\left\{9-x,\, 9-x^2\right\}}{(9-x)}.$$

(10 Punkte)

Wegen $(x^4+(x-6)^2) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist diese Ungleichung äquivalent zu*

$$\frac{(x^2-9)}{|x+3|} \leq \frac{\max\left\{9-x,\, 9-x^2\right\}}{(9-x)} .$$

Wir betrachten den Maximumsausdruck: $\max\left\{9-x,\, 9-x^2\right\} = 9-x$ *ist äquivalent zu* $9-x \geq 9-x^2$ *also zu* $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ *und damit zu* $x \in\,]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$.

Fall $x < -3$: *und* $x \geq 1$ *mit* $x \neq 9$: *Die Ungleichung ist äquivalent zu*

$$\frac{(x-3)(x+3)}{-(x+3)} = \frac{(x^2-9)}{|x+3|} \leq \frac{9-x}{9-x} = 1 ,$$

also zu $-(x-3) = -x+3 \le 1,$ *also zu* $2 \le x$. *Es folgt* $L_1 = \emptyset$.

Fall $-3 < x \le 0$ *und* $x \ge 1$ *mit* $x \ne 9$*: Die Ungleichung ist äquivalent zu*

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} = \frac{(x^2-9)}{|x+3|} \le \frac{9-x}{9-x} = 1\ ,$$

also zu $(x-3) = x-3 \le 1,$ *also zu* $x \le 4$. *Es folgt* $L_2 =]-3,\, 0] \cup [1,\, 4]$.

Fall $0 < x < 1$: *Die Ungleichung ist äquivalent zu*

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} = \frac{(x^2-9)}{|x+3|} \le \frac{9-x^2}{9-x}$$

und damit wegen $0 < x < 1$ *zu* $((9-x)(x-3) = -x^2+12x-27 \le -x^2+9$ *also zu* $12x \le 36$. *Wir erhalten* $L_3 = [0,\, 1]$ *und insgesamt* $L =]-3,\, 4]$.

Aufgabe 4: Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und } v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ mit $a \ne 0$, so dass das Gleichungssystem $A \cdot x = av^1 + v^2$ lösbar ist. Geben Sie in diesem Fall alle Lösungen an. (10 Punkte) +

Es gilt $av^1 + v^2 = \big(a-1,\, a+1,\, 3a-3,\, -2a+2\big)^T$. *Wir erhalten damit das Gleichungssystem*

x_1	x_2	x_3	x_4	av^1+v^2
1	-1	2	1	$a-1$
2	-1	1	3	$a+1$
-1	2	-1	1	$3a-3$
-1	0	1	-2	$-2a+2$
1	-1	2	1	$a-1$
0	1	-3	1	$-a+3$
0	1	1	2	$4a-4$
0	-1	3	-1	$-a+1$
1	0	-1	2	2
0	1	-3	1	$-a+3$
0	0	4	1	$5a-7$
0	0	0	0	$-2a+4$
1	0	-9	0	-6
0	1	-7	0	-2
0	0	4	1	3

Es folgt $a = 2$ *und damit* $x_1 = 9x_3 - 6,\ x_2 = 7x_3 - 2,\ x_4 = -4x_3 + 3,$ *also gilt* $L = \big\{\lambda \cdot v + w \big|\, \lambda \in \mathbb{R}\big\}$ *mit* $v = \big(9,\, 7,\, 1\ -4\big)^T$ *und* $w = \big(-6,\, -2,\, 0,\, 3\big)^T$.

Aufgabe 5: Gegeben sei Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A die Eigenwerte 1 und -1 besitzt und bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. (12 Punkte)

Wenn A eine Matrix ist, die nur die Eigenwerte 1 und -1 besitzt, Dann ist A invertierbar mit den gleichen Eigenwerten und Eigenvektoren. Wir berechnen also die Eigenvektoren von A^{-1} zu den Eigenwerten 1 und -1. Wir lösen also die Gleichungssyteme $(A^{-1} - I)x = 0$ und $(A^{-1} + I) = 0$.

$$
\begin{array}{rrrr|r}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\
\hline
-4 & 6 & -2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\
2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\
\hline
0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|r}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\
\hline
-2 & 6 & -2 & -2 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -2 & 2 & 2 & 0 \\
2 & -4 & 2 & 2 & 0 \\
\hline
-2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\quad .
$$

Im Fall des Eigenwertes 1 erhalten wir $x_1 = x_3 - 2x_4,\ x_2 = x_3 - x_4$; also die Eigenvektoren $v^1 = \big(1,\,1,\,1,\,0\big)^T,\ v^2 = \big(-2,\,-1,\,0,\,1\big)^T$; und im Fall des Eigenwertes -1 erhalten wir $x_1 = -x_3 - x_4,\ x_2 = 0$; also die Eigenvektoren $v^3 = \big(-1,\,0,\,1,\,0\big)^T,\ v^4 = \big(-1,\,0,\,0,\,1\big)^T$.

Damit gilt $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6: Gegeben seien die Matrizen

$$
A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

i) Zeigen Sie, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
ii) Berechnen Sie die Matrix $A^{-2} + A^{-3} + A^4 + A^5$. (12 Punkte)

i) Mit v^k bezeichnen wir die Spatenvektoren der Matrix S: $v^k = S_k^S$ für $k = 1, \ldots, 4$. Durch Nachrechnen erkennt man $Av^1 = v^1,\ Av^2 = v^2,\ Av^3 = -v^3,\ Av^4 = -v^4$. Daher ist A diagonalisierbar mit

$$
D := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

ii) *Wegen* $A = SDS^{-1}$ *gilt*

$$\begin{aligned} A^{-2}+A^{-3}+A^4+A^5 &= S\big(D^{-2}+D^{-3}+D^4+D^5\big)S^{-1} \\ &= S\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & 4 \\ 12 & -4 & 8 & 12 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Für die Produktion der Güter $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ werden die Rohstoffe $R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4,\ R_5$ verbraucht. In 5 Produnktionstagen fallen die folgenden Produktions– und Verbrauchszahlen (jeweils in Einheiten) an. Bestimmen Sie die Matrix $A = \big(a_{i,j}\big)$, die die Produktion beschreibt. Dabei sei $a_{i,j}$ die Zahl der zur Produktion einer Einheit von B_j erforderlichen Einheiten von R_i.

Tag Nr.	1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
B_1	1	1	1	1	2	R_1	4	5	6	9	11
B_2	1	2	1	3	3	R_2	4	7	5	10	12
B_3	1	0	2	1	2	R_3	4	7	4	9	11
B_4	1	3	1	4	4	R_4	2	3	2	4	5
						R_5	5	7	6	10	13

(8 Punkte)

X sei die Matrix der Produktionsdaten, und Y die Matrix der Verbrauchsdaten:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 9 & 11 \\ 4 & 7 & 5 & 10 & 12 \\ 4 & 7 & 4 & 9 & 11 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

Es wird also eine Matrix A gesucht mit $A \cdot X = Y$ oder äquivalent dazu mit $X^T \cdot A^T = Y^T$.

Diese letzte Gleichung fassen wir als Geichungssystem zur Bestimmung der Matrix A^T auf:

$$
\begin{array}{cccc|ccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 2 & 5 \\
1 & 2 & 0 & 3 & 5 & 7 & 7 & 3 & 7 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & 6 \\
1 & 3 & 1 & 4 & 9 & 10 & 9 & 4 & 10 \\
2 & 3 & 2 & 4 & 11 & 12 & 11 & 5 & 13 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 2 & 5 \\
0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 3 & 5 & 6 & 5 & 2 & 5 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 3 & 5 & 6 & 5 & 2 & 5 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
\; ; \textit{also } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .
$$

Aufgabe 8: Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $A^3 = 0$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 3$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ berechne man $(\lambda I + A)^m$ mit Hilfe vollständiger Induktion nach m. (10 Punkte)

Es gilt

$$(\lambda I + A)^3 = \lambda^3 I + 3\lambda^2 I \cdot A + 3\lambda I \cdot A^2 + A^3 = \lambda^3 I + 3\lambda^2 A + 3\lambda A^2 \; .$$

Wir behaupten jetzt $(\lambda I + A)^n = \lambda^n I + \binom{n}{1}\lambda^{n-1} A + \binom{n}{2}\lambda^{n-2} A^2$ *für alle* $n \geq 3$. *Für* $n = 3$ *ist diese Aussage richtig.*
$n) \Longrightarrow n+1)$: *Es gilt wegen der Induktionsvoraussetzung und wegen* $A^3 = 0$

$$
\begin{aligned}
(\lambda I + A)^{n+1} &= (\lambda I + A)(\lambda I + A)^n = (\lambda I + A)(\lambda^n I + \tbinom{n}{1}\lambda^{n-1} A + \tbinom{n}{2}\lambda^{n-2} A^2) \\
&= \lambda^{n+1} I + \tbinom{n}{1}\lambda^n A + \tbinom{n}{2}\lambda^{n-1} A^2 \\
&= \lambda^{n+1} I + \big(1 + \tbinom{n}{1}\big)\lambda^n A + \big(\tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{2}\big)\lambda^{n-1} A^2 \\
&= \lambda^{n+1} I + \tbinom{n+1}{1}\lambda^n A + \tbinom{n+1}{2}\lambda^{n-1} A^2
\end{aligned}
$$

für alle $n \geq 3$.